

2ª Prova Escrita de Matemática I
USP, a 1 de setembro de 2005 - Peso desta prova: 1.2

1,5 **Questão 1** Calcule a área da região do plano que fica entre as parábolas $y = x^2$ e $y = 4 - x^2$.

2,0 **Questão 2** Determine o valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual o gráfico da função $f(x) = \lambda x - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, divide o quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ em duas regiões de mesma área.

1,0 **Questão 3** Seja $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e ímpar (atendendo a pedidos, i.e. $f(-x) = -f(x)$, para todo x). Prove que $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

1,5 **Questão 4** Calcule $\int_{-1}^1 x^3 - \sqrt{|x|} + 1 dx$.

2,0 **Questão 5** Mostre que $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável.

Sugestão: Calcule $\bar{I}(f)$ e $\underline{I}(f)$.

2,0 **Questão 6** Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Prove que

$$[nx] = [x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}].$$

3,0 **Questão 7** Seja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(0) = 0$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{2n-1} \\ 0, & \text{se } \frac{1}{2n+1} < x \leq \frac{1}{2n} \end{cases}$$

0,5 [i] Mostre que se $0 < \varepsilon < 1$ então $f|_{[\varepsilon, 1]}$ é uma função escada.

1,0 [ii] Mostre que se $0 < \varepsilon < 1$ e $\bar{I}(f|_{[0, \varepsilon]}) < \varepsilon$.

1,0 [iii] Mostre que f é integrável.

5,0 **Questão 8** Sejam $f, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis:

[i] Mostre que, se $f(x) \geq 1$ para todo x , então $g(x) = f^2(x)$ é integrável.

[ii] Prove que $g(x) = f^2(x)$ é integrável, mesmo sem as hipóteses de [i].

1,5 [iii] Prove que $g(x) = f(x)h(x)$ é integrável. $(f \cdot h)^2$

19:30

até 26
3:00