1ª prova CCM - 2005 - Matemática I - 24/11/2005

(1,5) **Questão 1**: Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ derivável em todo ponto.

(0,75) (a) Mostre que se f é par então f' é ímpar.

(0,75) (b) Mostre que se f é ímpar então f' é par.

(1,5) **Questão 2**: Sejam $K>0$ e $\varepsilon>0$.

(1,0) a) Mostre que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\dfrac{K^n}{n!}<\varepsilon$, se $n\geq n_0$.

(0,5) b) Mostre que, se T_n é o polinômio de Taylor de $f(x)=e^x$ de ordem n em $x_0=0$, então existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, se $n\geq n_0$, $|f(x)-T_n(x)|\leq\varepsilon$, $\forall x\in[-K,K]$

(2,0) **Questão 3**: Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{-x^2}}{x^2+2}$.

a) Esboce o gráfico de f.

b) Seja T_2 o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em 0. Calcule $T_2(x)$ e dê a melhor estimativa que conseguir para $E_2(x)$. (CUIDADO, a nota depende de quão boa for a sua estimativa, comparada com a que eu consegui achar, eh! eh! eh!...)

(2,0) **Questão 4**: Seja $f:\mathbb{R}\xrightarrow{\boxed{C^1}}\mathbb{R}$ tal que, se $\varepsilon>0$, existe $x_\varepsilon\in(0,\varepsilon)$ tq $f'(x_\varepsilon)=0$. Prove que $f'(0)=0$.

(2,0) **Questão 5:** Seja $f: \mathbb{R} \xrightarrow{C^n} \mathbb{R}$.

(a) Mostre que se $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$ então $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.

(b) Mostre que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + R_n(x)$$

onde $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$.

(1,5) **Questão 6.** Seja $f: \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ tq $f(0) = 0$ e suponha que $k \in \mathbb{N}$ é tal que, $f^{(k)}(0) = A \neq 0$ e $f^{(j)}(0) = 0$, para $0 \leq j < k$.

(a) Mostre que se k é ímpar então 0 não é ponto de extremo local de f.

(b) Mostre que se k é par e $A > 0$ então 0 é ponto de mínimo local estrito de f.

(c) O que acontece se k é par e $A < 0$?

Questão extra: prove que $\operatorname{sen}(1) \notin \mathbb{Q}$

(3,0) **Questão 7** Seja $f: [a,b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = f'(b)$.

(assuma considerando $f'(a) = f'(b) = 0$)

Prove que existe $c \in \,]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$