MATEMÁTICA I - CCM - 2005 - 4ª PROVA ESCRITA

Questão 1 Calcular os seguintes limites:

0,5 [i] $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx}$, onde a e b são cosntantes, reais, diferentes de zero.

0,5 [ii] $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+\sin^2 x}}{2x^2}$.

1,0 [iii] $\lim x \to a\frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e a é uma raiz de multiplicidade m de $p(x)$ e é uma raiz de multiplicidade n de $q(x)$. Considere os casos $m > n$, $m < n$ e $m = n$.

1,5 **Questão 2** Seja $f : \cancel{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Prove que $h(x) = (f \circ \sin)(x)$, $x \in \mathbb{R}$, é limitada.
$\mathbb{R}$ $\exists x, y$ $f(x)$ e $f(y)$ são valores ...

1,5 **Questão 3** Calcular $\lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$.

1,5 **Questão 4** Seja $p(x)$ um polinômio de coeficientes reais e grau ímpar, mostre que, se $c \in \mathbb{R}$, existe $\overline{x} \in \mathbb{R}$, tal que $p(\overline{x}) = c$.

1,0 **Questão 5** Seja $f : [0, 17] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e estritamente crescente tal que $f(0) = 0$, $f(17) = 5$ e $\int_0^{17} f(x)dx = 5$. Seja g a inversa de f, calcular $\int_0^5 g(x)dx$.

1,5 **Questão 6** Seja $f(x) = \cos x$, se $x \geq c$, e $f(x) = ax + b$, se $x < c$, onde a, b e c são reais. Fixe b e c e ache os valores de a (se existirem) para os quais f é contínua em $x = c$.

2,0 **Questão 7** Use que $(1 + x^6) = (1 + x^2)(1 - x^2 + x^4)$ para provar que, se $a > 0$,

$$\frac{1}{1+a^6}\left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}\right) \leq \int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx \leq \left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}\right).$$

2,5 **Questão 8** Mostre que a equação $\cos(\sin(x)) = x$ tem uma, e só uma, solução em $\mathbb{R}$ e que, além disso, essa solução está no intervalo $[0, 1]$.

3,0 **Questão 9** Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e convexa, com $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

2,5 [i] Mostre que $\int_a^b f(x)dx \leq \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a))$.

[ii] Mostre que, se $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$, com $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$, para $k = 0, 1, \ldots, k-1$ então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{b-a}{n}(f(b) + f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)).$$

[iii] Prove que $\frac{7}{12} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx \leq \frac{17}{12}$.